2. インスタントンと巾零軌道

$\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$ を超ケーラー多様体と思う。 (あとで一点コンパクト化 $S^4=\mathbb{HP}^1$ も用いる。)

これは超ケーラーではない

G : compact Lie 群 (あとで連結, 半単純を仮定する)

$P\to\mathbb{H}$: $\mathbb{H}$ 上の $\underbrace{}_{C^\infty}$ G-主束 (自明束と同型になる) $\mathrm{ad}P=P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ 随伴束

定義. A : P 上の接続 が インスタントン (反自己双対接続) であるとは

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ A の曲率 $F_A\in A^2(\mathrm{ad}P)$ が 反自己双対 i.e. $*F_A=-F_A$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{H}$ の概複素構造 I, J, K について $F_A(I\cdot,I\cdot)=F_A(J\cdot,J\cdot)=F_A(K\cdot,K\cdot)=F_A(\cdot,\cdot)$ が成立つ

$\Longleftrightarrow$ 〃 $\underbrace{A\text{ と compatible な 正則 }G^{\mathbb{C}}\text{-主束}}^{P\text{ を }G^{\mathbb{C}}\text{ に}}$ $\underbrace{\mathcal{P}_I, \mathcal{P}_J, \mathcal{P}_K}_{\text{の構造}}$ が存在する。

P上の接続の全体 $\mathcal{A}$ は ∞次元超ケーラー多様体になる

$$T_A\mathcal{A} \cong A^1(\mathrm{ad}\,P)$$

I, J, K on $\mathbb{H}$ が I, J, K on $A^1(\mathrm{ad}\,P)$ を誘導し
std な内積 on $\mathbb{H}$ から決まる L^2 計量が $\mathcal{A}$ 上のリーマン計量を定める

$\mathcal{G}$ = ゲージ群 (但し ∞ で id に収束するもの)

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}^* \otimes \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$$
$$A \longmapsto (F_A \wedge \omega_I,\ F_A \wedge \omega_J,\ F_A \wedge \omega_K)$$

$M = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ ∶ P上のインスタントンの枠付きモジュライ空間

(但し解析をきちんと行う必要がある)

結局は $\mathbb{HP}^1$ 上の接続を制限したものになり
($\mathbb{HP}^1 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$)
∞で id となる $\mathbb{HP}^1$ 上の ゲージ群で割ればいいことになる.

M は超ケーラー多様体になる

$SU(2) \curvearrowright \mathbb{H}$: I, J, K と可換な作用
($SU(2) = Sp(1)$)

($\mathbb{H}$ には左からと右からのかけ算により
$Sp(1) \times Sp(1)$ が作用するが,
そのうち i, j, k が入っていない方をとる。)

そこで Sp(1)-不変 インスタントンを考える。 $M^{Sp(1)}$ は超ケーラー多様体である。

$$
\begin{array}{cccc}
Sp(1) \curvearrowright & P & \supset & P_0 \quad P_\infty \\
 & \downarrow & & \downarrow \quad\ \downarrow \\
 & \mathbb{HP}^1 & \ni & 0\ ,\ \infty
\end{array}
$$

: Sp(1)-作用の固定点。

$\rho_- : Sp(1) \to G$ 　0のfiberへの作用

$\rho_+ : Sp(1) \to G$ 　∞のfiberへの作用

$M(\rho_-, \rho_+) = M^{Sp(1)}$ のうち 0のfiberへの作用が ρ_- (と共役)

∞のfiberへの作用が ρ_+ (ここは本当に等しい)

とおく。 これがKronheimerが調べた超ケーラー多様体である。

$Sp(1)$-不変な接続なので，S^3上の不変微分形式を用いて　　4つの $\mathfrak{g}$-valued func. on $\mathbb{R}$ で表わされ A_0, A_1, A_2, A_3

反自己双対方程式は常微分方程式になる

$$\frac{dA_1}{dt} = -2A_1 - [A_0, A_1] - [A_2, A_3]$$

$$\frac{dA_2}{dt} = -2A_2 - [A_0, A_2] - [A_3, A_1]$$

$$\frac{dA_3}{dt} = -2A_3 - [A_0, A_3] - [A_1, A_2]$$

$A_i : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$

あとで

$\mathfrak{sp}_1$　　$\mathfrak{sl}_2$

$e_1 = i = \begin{bmatrix} -i & \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$e_2 = j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$e_3 = k = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

境界条件は　A_0 : $\lim_{t \to -\infty} A_0(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} A_0(t) = 0$

その他 : $\lim_{t \to -\infty} A_a(t) = Ad(g) d\rho_-(e_a)$ $\exists g \in G$

$\lim_{t \to \infty} A_a(t) = d\rho_+(e_a)$　　$a = 1,2,3$

参考　"$-2A_a$" の部分がないものは Nahm方程式と呼ばれ，$\mathbb{R}^3$-不変なインスタントンの方程式である。

○ ADHM-Nahm 変換 : モノポール $\longleftrightarrow$ Nahm方程式の解

○ Donaldson : Nahm方程式の解のモジュライ $\longleftrightarrow$ $\{\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ (より一般に flag var.) 正則写像$\}$

このような ODE の解の全体を $g:\mathbb{R}\to G$ (ゲージ変換)の作用

$$A_0 \mapsto Ad(g)A_0 - \frac{dg}{dt}g^{-1}$$
$$A_i \mapsto Ad(g)A_i \qquad (i=1,2,3)$$

で割った商空間 が $M(p_-,p_+)$ に他ならない.

注) $S^3\times\mathbb{R}$ 上の インスタントン は Chern-Simons 汎関数 に関する gradient flow と思うことができる。 ($\rightsquigarrow$ Yang-Mills Floer homology)
instanton

今の場合 も そのような 解釈 が可能であり, Chern-Simons 汎関数 の critical point
$=Sp(1)$ -不変な 平坦接続
$=\rho: Sp(1)\to G$ 準同型
となっており

2つの 準同型 ρ_-,ρ_+ を 結ぶのが $M(\rho_-,\rho_+)$ である。

$M(\rho_-,\rho_+)$ 自身も 超ケーラー商 として 記述される ; $M(\rho_-,\rho_+)=\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$

$\mathcal{A}=\{(A_0,A_1,A_2,A_3):\mathbb{R}\to\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \mid$ 境界条件$\} \curvearrowleft \mathcal{G}=\{g:\mathbb{R}\to G\}$ ゲージ群

μ : 先の ODE の 左辺 − 右辺 に 他ならない。

注. Gが古典型(ABCD)のときには ADHM記述を用いてインスタントンのモジュライ空間を
有限次元 H ベクトル空間の超ケーラー商として書くことができる。

例えば $G=SU(n)$ のとき　A_ℓ型の箙多様体　(但しパラメータはすべて0)として
記述される

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & V_2 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & V_3 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & V_\ell \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\
W_1 \arrow[u, shift left] & W_2 \arrow[u, shift left] & W_3 \arrow[u, shift left] & & W_\ell \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

$G=\prod U(V_\ell)$ で割る

逆に A_ℓ型の箙多様体は $Sp(1)$-不変なインスタントン(但し$SU(n)$)のモジュライ空間
として理解できる。　A_ℓ型箙多様体は元々は $\mathbb{Z}/(\ell+1)\mathbb{Z}$ -不変な
インスタントンのモジュライ空間として導入されたので
これは自明なことではない。

○モジュライ空間を複素多様体として記述する。

$\rho : \underset{\substack{\| \\ Sp(1)}}{SU(2)} \longrightarrow G \quad \rightsquigarrow \quad \rho : \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ Lie環の準同型を同じ記号で表わす。

$$H := \rho\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X := \rho\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y := \rho\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

Y: nilpotent である。 Yを通る $G^{\mathbb{C}}$-orbit を $\mathcal{N}(\rho)$ で表わす。(nilpotent orbit)

逆に任意の nilpotent orbit は $SU(2) \xrightarrow{\rho} G$ から上の様にして得られ、ρは共役を除いて unique である。
(有限個しかない)

(Jacobson-Morosov の定理)
cf. Chriss-Ginzburg §3.7

e.g. $G = SU(n)$
Jordan行列 $\Leftrightarrow$ nの分割 $\leftrightarrow$ $SU(2)$のn次元の表現

Slodowy slice (standard slice) を

$$\mathcal{S}(\rho) := Y + Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X) \quad \text{アファイン空間}$$

と定義する。 $\mathcal{S}(\rho) \cap \mathcal{N}(\rho) = \{Y\}$

注、 $\mathbb{H}$ と $\mathfrak{su}_2$, $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ について基底の対応を書いておこう

$\mathbb{H}$	$\mathfrak{su}_2$
i	$\leftrightarrow e_1 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
j	$\leftrightarrow e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
k	$\leftrightarrow e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = i e_1$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}(e_2 + i e_3) \qquad e_2 = X - Y$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}(-e_2 + i e_3) \qquad e_3 = -i(X+Y)$$

$$\mathfrak{sl}_2\mathbb{R} = \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y = \underbrace{\mathbb{R}(X-Y)}_{=\mathfrak{k}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}(X+Y)}_{=\mathfrak{p}}$$

カルタン分解

$$\mathfrak{su}_2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 = \underbrace{\mathbb{R}(X-Y)}_{=\mathfrak{k}} \oplus \overbrace{\mathbb{R}\,iH \oplus \mathbb{R}\,i(X+Y)}^{=i\mathfrak{p}}$$

$$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} = \mathfrak{sl}_2\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{su}_2 \otimes \mathbb{C}$$

他の講演では $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ が基本になっているのに対し
この講演では $\mathfrak{su}_2$ が基本なので
注意が必要である。

定理 (Kronheimer)

$\mathbb{H}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j$ を取る. このとき $M(\rho_-,\rho_+)\cong N(\rho_-)\cap S(\rho_+)$ となる。

注 $\mathbb{H}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j$ を取りかえても, できる複素多様体 はつねに $N(\rho_-)\cap S(\rho_+)$ と同型になる。

しかし

$$\begin{tikzcd} M(\rho_-,\rho_+) \arrow[r, "\cong", "I"'] \arrow[d, "J"', "\cong"] & N(\rho_-)\cap S(\rho_+) \arrow[dl, <->] \\ N(\rho_-)\cap S(\rho_+) & \end{tikzcd}$$

この diffeo. は 複素構造を保たない

類似

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[d, equal] \arrow[r, equal] & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2 \arrow[ddl, <->] \\ \mathbb{C}'\oplus\mathbb{C}'i' \arrow[d, "\cong"'] & \\ \mathbb{C}^2 & \end{tikzcd}$$

合成は $\mathbb{C}$-linear でない.

注. $\rho_+=$ 自明のとき $S(\rho_+)=\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$\therefore\ M(\rho_-,\rho_+)\cong N(\rho_-)$ この場合を Vergne では使う。

$\alpha = \frac{1}{2}(A_0 + iA_1)$, $\beta = \frac{1}{2}(A_2 + iA_3)$ とおく.　　α, β : $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-valued function on $\mathbb{R}$

このとき ODE は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha+\alpha^*) + 2(\alpha+\alpha^*) + 2\{[\alpha,\alpha^*] + [\beta,\beta^*]\} = 0 & \text{(real equation)} \\ \frac{d\beta}{dt} + 2\beta + 2[\alpha,\beta] = 0 & \text{(complex equation)} \end{cases}$$

と書き直される。

このとき complex equation は,　$g : \mathbb{R} \to G^{\mathbb{C}}$　(複素ゲージ変換)による

$$\alpha \mapsto \mathrm{Ad}(g)(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}g^{-1}$$
$$\beta \mapsto \mathrm{Ad}(g)(\beta)$$

という作用で不変である。

$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \{g : \mathbb{R} \to G^{\mathbb{C}} + \text{bdry cond.}\}$ とおく。

これを $\mathcal{G}$ の'複素化'と考える。

目標.　有限次元の Kempf-Ness, Kirwan の定理の類似

$$M(p_-, p_+) = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G} \overset{\downarrow}{=} \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{N}(p_-) \cap S(p_+)$$

(安定性の条件は境界条件に隠されている)

境界条件の正確な statement

$H_\pm, X_\pm, Y_\pm$ を $p_\pm$ について前と同様に定める

$2\alpha(t) \to H_+$, $\beta(t) \to Y_-$ as $t \to +\infty$

$\alpha(t) \to \mathrm{Ad}(g)H_-$, $\beta(t) \to \mathrm{Ad}(g)Y_-$ for some $g \in G$ as $t \to -\infty$

さらにこの収束は exponential decay である。

Step 1 $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{U}(p_-) \cap S(p_+)$

証明のキー　複素ゲージ変換 $\alpha' = \mathrm{Ad}(g)\alpha - \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}g^{-1}$ によって
$\beta' = \mathrm{Ad}(g)\beta$

$\alpha' = 0$
と境界条件を考えなければできる

このとき cpx eqn $\frac{d\beta'}{dt} + 2\beta' + \underbrace{[\alpha', \beta']}_{=0} = 0$ より $\beta' = e^{-2t}\beta_0$
となる。

特に $\mathbb{R} \supset [a,b]$ に制限してしまうと β_0(の共役類)で解の複素ゲージ同値類が決まる。

逆に $e^{2a}\beta(a)$ と $e^{2b}\beta(b)$ が同じ共役類になるように境界条件 $\beta(a), \beta(b)$ が与えられると

$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ が cpx equation をみたすように解を構成できる。

Lemma 8

α, β : cpx equ. の解で $t \to -\infty$ で $2\alpha(t) \to H_-$, $\beta(t) \to Y_-$ をみたす

$\Rightarrow \exists$ cpx gauge $g_- : (-\infty, a] \to G^{\mathbb{C}}$ s.t. $g_- \to 1$ as $t \to -\infty$

(unique ではない)

$(\alpha', \beta') = g_-(\alpha, \beta)$ とゲージ変換すると

$2\alpha' = H_-$, $\beta' = Y_-$ となる。

Lemma 9

α, β : cpx equ の解で $t \to +\infty$ で $2\alpha(t) \to H_+$, $\beta(t) \to Y_+$ をみたす

$\Rightarrow \exists 1$ cpx gauge $g_+ : [b, +\infty) \to G^{\mathbb{C}}$ s.t. $g_+(t) \to 1$ as $t \to +\infty$

(unique)

$(\alpha', \beta') = g_+(\alpha, \beta)$ とゲージ変換すると

$2\alpha' = H_+$, $\beta'(0) \in S(p_+)$ となる。

証明) まず ODE $H_\pm = \mathrm{Ad}(g_0)(2\alpha) - \frac{dg_0}{dt} g_0^{-1}$ を解くことにより

$2\alpha \equiv H_\pm$ (定数) とすることができる。

すると cpx equation より $\beta(t) = \mathrm{Ad}\,\exp(-(2+H_\pm)t))(\omega)$ $\exists\, \omega \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

と書ける。

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$ と $\mathrm{ad}\, H_\pm$ で weight 分解すると

$t \to \pm\infty$ で $\beta(t) \longrightarrow \gamma_\pm$ であるから $\omega = \gamma_\pm + \delta_\pm$ と表せる。

$$\delta_\pm \in \bigoplus_{\substack{i>-2 \ \leftarrow\ + \text{のとき} \\ i<-2 \ \leftarrow\ - \text{のとき}}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$$

さらに $g_1 : \mathbb{R} \to G^{\mathbb{C}}$ で $\begin{cases} H_\pm = \mathrm{Ad}(g_1)(H_\pm) - \frac{dg_1}{dt} g_1^{-1} \\ g_1(t) \longrightarrow 1 \quad t \to \pm\infty \end{cases}$ をみたす gauge 変換の自由度が残っている。

これを解くと、 $g_1(t) = \exp(-H_\pm t)\exp(\gamma_\pm)\exp(H_\pm t)$ $\quad \gamma_\pm \in \bigoplus_{\substack{i>0 \ \leftarrow\ + \text{のとき} \\ <0 \ \leftarrow\ - \text{のとき}}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$

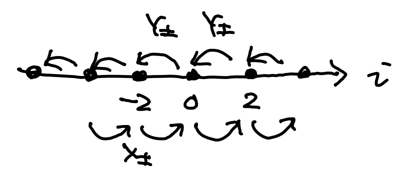
あとは $\forall \delta_- \in \bigoplus_{i<-2} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$ $\exists\, \gamma_- \in \bigoplus_{i<0} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$ s.t. $\mathrm{Ad}(\exp(\gamma_-))(Y_- + \delta_-) - Y_- = 0$

と $\forall \delta_+ \in \bigoplus_{i>-2} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$ $\exists_1\, \gamma_+ \in \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$ s.t. $\mathrm{Ad}(\exp(\gamma_+))(Y_+ + \delta_+) - Y_+ \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X_+)$

を示せばよい。

$\gamma_\pm = \delta_\pm = 0$ で左辺の微分を考えると $\dot{\delta}_\pm - [Y_\pm, \dot{\gamma}_\pm]$ となっている。

$$\mathrm{ad}\, Y_\pm : \bigoplus_{\substack{i>0 \\ <0}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{i>-2 \\ <-2}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(i)$$



を考えると、 $i>0 \to i>-2$ のときは単射で像は $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X_+)$ の補空間

$i<0 \to i<-2$ のときは全射

線型化問題については結論は正しい。陰関数定理によって $\delta_\pm$ が十分小さいときは正しい。

あとは $\delta_\pm \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(\mp(2+H_\pm)t))(\delta_\pm)$

$\gamma_\pm \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(\mp H_\pm t))(\gamma_\pm)$ と変換してやればよい。

t 十分大 //

よって (α, β) は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ によって次の形に直せる：

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2} H_- \\ \beta(t) = Y_- \end{cases} \qquad t \in (-\infty, -1]$$

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2} H_+ \\ \beta(t) = Y_+ + \mathrm{Ad}(\exp(-(2+H_+)t))(\delta_+) \end{cases} \qquad t \in [0, \infty)$$

$$\beta(0) = Y_+ + \delta_+ \in S(\rho_+) = Y_+ + Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X_+)$$

さらに δ_+ は unique に定まる。

そこで
$$\begin{array}{ccc} \{(\alpha, \beta)\}/\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & S(\rho_+) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & Y_+ + \delta_+ \, (= \beta(0)) \end{array}$$
を考える。

(α, β) は $(\frac{1}{2}H_-, Y_-)$ と区間に制限すれば同値であるから $Y_+ + \delta_+ \in \mathcal{N}(\rho_-)$ である。

逆に $\mathcal{N}(\rho_-) \cap S(\rho_+)$ の元が与えられれば、上で $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ の解を定めて、

さらに $[-1, 0]$ において複素ゲージ変換で、左と右の解をつなぎ、$(-\infty, +\infty)$における解を構成できる。

これは全単射であるが複素構造 I について複素多様体の同型であることも分かる。 //

Step 2 $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G} = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$

Kempf-Ness, Kirwan の結果の ∞次元版 であるが
Hitchin-小林対応の常微分方程式 ver. とも思える

証明は Donaldson: Nahm's equation and the classification of monopoles, CMP 96 (1984) 387~407
に沿って与えられる。

map $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G} \longrightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)/\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ は $\mu^{-1}(0) \subset \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ から誘導される。これが全単射といいたい。

$g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G}$ で $(\alpha,\beta) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ をゲージ変換 $g(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$ とうつし、

$$\hat{F}(\alpha',\beta') = \frac{d}{dt}(\alpha+\alpha^*) + 2(\alpha'+\alpha'^*) + 2\left([\alpha',\alpha'^*] + [\beta',\beta'^*]\right) = 0$$

をみたすようにしたい。 $g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}/\mathcal{G} = \{h(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H} = G^{\mathbb{C}}/G + \text{bdry cond.}\}$

$h = g^* g$

self-adjoint, positive def. な "matrix" 全体

tに関する ODE と見て、解がただ一つ存在することをいいたい。

これは $\mathcal{H}$（非正曲率であることに注意!!）の測地線の方程式（にポテンシャルを加えたもの）である。

local existence

α, β : cpx equation の解, $h_\pm \in \mathcal{H}$ $\exists g : [-N, N] \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ s.t. $h(g) = h_\pm$ at $t = \pm N$

& $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$ は real equationをみたす。

証明は real equation が汎関数 $\mathcal{L}(g) = \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} (|\alpha' + \alpha'^*|^2 + 2|\beta'|^2) e^{2t} dt$

のオイラーラグランジュ方程式であることによる。

$h \in \mathcal{H}$ に対し $\Phi(h) := \log \max(\lambda_i) \in \mathbb{R}$ (但し $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ は $\mathrm{Ad}(h)$ の固有値である)

とおく。

$\Phi(h) = 0 \Leftrightarrow h = 1$ ($\mathrm{tr}\,\mathrm{Ad}(h) = 0$ より) に注意する

Lemma (convexity) $(\alpha', \beta') = g(\alpha, \beta)$, $h = g^* g$ のとき

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi(h) + 2\frac{d}{dt}\Phi(h) \geqq -2\left(|\hat{F}(\alpha, \beta)| + |\hat{F}(\alpha', \beta')| \right)$$ が成立つ。

Cor. 解は unique

existence

まず Step1 のように解を $(-\infty,-1]$, $[0,\infty)$ で標準形に直す。すると

$$\hat{F}(\alpha,\beta)=0 \quad \text{on} \quad (-\infty,-1], \qquad |\hat{F}(\alpha,\beta)| \leqq C e^{-4t} \quad \text{on} \quad [0,\infty)$$

が 計算すると分かる。

さらに ある $N>0$ に対し $g_N:[-N,N]\to G^{\mathbb{C}}$ を gauge 変換でうつしたものが real equ. をみたし

$$h(g_N)\big|_{t=\pm N}=1$$

をみたすように取る。

このとき $N\to\infty$ のときに g_N が収束することをいう。

$$\varphi := \begin{cases} \frac{C}{2}e^{2}-\frac{C}{4}e^{4} & t\leqq -1 \\ \frac{C}{2}e^{-2t}-\frac{C}{4}e^{-4t} & t\geqq -1 \end{cases}$$

とおく。 ($t=-1$ で等しい)

$$\ddot{\varphi}+2\dot{\varphi} = \begin{cases} 0 & t\leqq -1 \\ -2Ce^{-4t} & t>-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\Phi}(h_N)+2\dot{\Phi}(h_N) \geqq \ddot{\varphi}+2\dot{\varphi} \underset{\text{max. principle}}{\Longrightarrow} \Phi\leqq\varphi$$

$\Rightarrow$ h_N bdd, exponential decay at $t\to\infty$ $\Longrightarrow$ $h_N\to h$ as $N\to\infty$

境界条件もチェックされる //

M.Vergne の論文の紹介

G：コンパクト半単純リー群, $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}$の複素化, $G^{\mathbb{C}}=G$の複素化

Def. $\mathfrak{g}$の分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_3$ が quaternionic であるとは,

$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_j$, $[\mathfrak{g}_j,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]\subset\mathfrak{g}_3$, $[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_3]\subset\mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_3,\mathfrak{g}_1]\subset\mathfrak{g}_2$

が成立つときをいう。

$\mathfrak{g}$	$=\mathfrak{g}_0$	$\oplus\,\mathfrak{g}_1$	$\oplus\,\mathfrak{g}_2$	$\oplus\,\mathfrak{g}_3$
θ :	1	-1	1	-1
σ :	1	1	-1	-1

とおくと $\theta\sigma=\sigma\theta$ で θ,σ はともにLie環のinvolutionである。

逆に可換な二つのinvolutionがあれば、quaternionicな分解が固有空間分解で与えられる。

このとき

$\mathfrak{h}^1=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_1$　　$\mathfrak{s}^1=\mathfrak{g}_2\oplus i\mathfrak{g}_3$

$\mathfrak{h}^2=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_2$　　$\mathfrak{s}^2=\mathfrak{g}_3\oplus i\mathfrak{g}_1$

$\mathfrak{h}^3=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_3$　　$\mathfrak{s}^3=\mathfrak{g}_1\oplus i\mathfrak{g}_2$

とおく。

上より $\mathfrak{h}^j\oplus\mathfrak{s}^j$ $(j=1,2,3)$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のLie subalgebraで
$[\mathfrak{h}^j,\mathfrak{h}^j]\subset\mathfrak{h}^j$, $[\mathfrak{s}^j,\mathfrak{s}^j]\subset\mathfrak{h}^j$
$[\mathfrak{h}^j,\mathfrak{s}^j]\subset\mathfrak{s}^j$
(i.e. symmetric pair)

$H^j\subset G^{\mathbb{C}}$: $\mathfrak{h}^j$に対応する連結リー群

$G^0\subset G$: $\mathfrak{g}_0$に対応する連結リー群

$S/K \leftrightarrow G/K$

noncpt 対称空間　双対な コンパクト対称空間

例. $\mathfrak{s}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ (カルタン分解)　$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{s}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: コンパクト実形

σ : カルタン involution と可換な involution, $\mathfrak{s}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$: 対応する分解　$\sigma=1$ on $\mathfrak{h}$, $=-1$ on $\mathfrak{q}$

このとき $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}_1=i(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})$, $\mathfrak{g}_2=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}_3=i(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p})$ は quaternionic

このとき $\mathfrak{h}'=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}$, $\mathfrak{q}'=\mathfrak{g}_2\oplus i\mathfrak{g}_3=\mathfrak{q}$, $\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{q}'=\mathfrak{s}$ である。

このとき $(\mathfrak{h}^2\oplus i\mathfrak{q}^2, \mathfrak{h}^2)$: dual　$(\mathfrak{h}^3\oplus i\mathfrak{q}^3, \mathfrak{h}^3)$: associate in [関口]

さらに例.

$\mathfrak{s}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ カルタン分解　$\mathfrak{u}_0=\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}_1=i\mathfrak{p}$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0\oplus\mathfrak{u}_1=\mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{p}$ (コンパクト) とおく。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}$ とし $\Delta^0:\mathfrak{u}\to\mathfrak{g}$, $X\mapsto(X,X)$, $\Delta^1:\mathfrak{u}\to\mathfrak{g}$, $X\mapsto(X,-X)$ とおく。($\sigma:\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}$)

このとき $\mathfrak{g}_0=\Delta^0(\mathfrak{u}_0)$, $\mathfrak{g}_1=\Delta^0(\mathfrak{u}_1)$, $\mathfrak{g}_2=\Delta^1(\mathfrak{u}_0)$, $\mathfrak{g}_3=\Delta^1(\mathfrak{u}_1)$ は quaternionic である。

すると $\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{q}'=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus i\mathfrak{g}_3=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{s}\supset\Delta^0(\mathfrak{s})=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}'$

$(\mathfrak{h}^3\oplus\mathfrak{q}^3, \mathfrak{h}^3)$ についても同じ

$\mathfrak{h}^2\oplus\mathfrak{q}^2=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_3\oplus i\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}\supset\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_2=\mathfrak{h}^2$ となる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$: quaternionic

$\mathcal{N}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の nilpotent cone

$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}^j} = \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^j \quad \curvearrowleft H^j$ (orbit は有限個になることが知られている)

$(j = 1, 2, 3)$

Th (Vergne)

$\mathcal{O} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: nilpotent orbit

$j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対して $\exists S^{k,j} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ C^∞-diffeo, G-同変

s.t. $S^{k,j}(\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^j) = \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^k$

さらに $S^{k,j}$ は H^j-orbit を H^k-orbit にうつし,

それは 関口対応 を与える。

Kronheimer の $Sp(1)$-inv. インスタントンのモジュライ空間 において $\rho_- = \rho$, $\rho_+ =$ 自明な準同型 としたものを $M(\rho)$ で表わす。

$M(\rho) \cong \mathcal{N}(\rho)$ であった。 これは cpx str. I を使っていたので R_1 で表わす
J, K で与えられるものを R_2, R_3 で表わす。

さらに $M(\rho) \ni A = (A_0, A_1, A_2, A_3) \longmapsto \lim_{t \to -\infty} (A_1(t), A_2(t), A_3(t)) \in \underset{\text{G-orbit}}{\underset{\|}{Ad(G)}} (d\rho(e_1), d\rho(e_2), d\rho(e_3))$

は全射である。 ($M(\rho)$ は G-作用をもつ 上は同変だから)

$M(\rho)$ は gradient flow の空間であるから G-orbit を deformation retract として含むことになる。

例 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \supset$ nonzero nilpotent orbit は $S^3/\pm 1 = SU_2/\pm 1$ 上の cone である (← 頂点除く)

また、今の場合 $(A_0(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)) = \left(0, Ad(g)\frac{d\rho(e_1)}{1+e^{2t}}, Ad(g)\frac{d\rho(e_2)}{1+e^{2t}}, Ad(g)\frac{d\rho(e_3)}{1+e^{2t}}\right)$
がインスタントン方程式の解を与えていることも注意しよう。

あとで、この G-orbit が関口の S-triple を与えることになる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$: quaternionic な分解が与えられたとき、ρ として $\rho(e_j) \in \mathfrak{g}_j$ となるものを取り、

インスタントン方程式をみたす

$\mathcal{S}(\rho) := \{ (A_0, A_1, A_2, A_3) : \mathbb{R} \to \mathfrak{g} \mid A_j(t) \in \mathfrak{g}_j \quad j = 0,1,2,3 \} / \mathfrak{g}_0$ とおく。

$\cap$

$M(\rho)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \mathfrak{g} = & \mathfrak{g}_0 \oplus & \mathfrak{g}_1 \oplus & \mathfrak{g}_2 \oplus & \mathfrak{g}_3 \\ \theta & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sigma & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

より $\mathcal{S}(\rho)$ は $M(\rho)$ の誘作用に関する fixed pt set である

$$\begin{array}{ccc} M(\rho) & \longrightarrow & \mathrm{Ad}(G)(d\rho(e_1), d\rho(e_2), d\rho(e_3)) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{S}(\rho) & \longrightarrow & Q(\rho) \end{array}$$

但し

Lie環の hom.

$Q(\rho) := \{ \rho' : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g} \mid \rho'(e_j) \in \mathfrak{g}_j \ (j=1,2,3)$ かつ ρ と G で共役 $\} \curvearrowleft G^0$

[関口] における strictly normal S-triple の集合に一致する。

$Q(\rho)/G^0$: 有限

そこで $\mathcal{S}(\rho)$ をこれに応じて分け、

$$\mathcal{S}(\rho) = \coprod_{\alpha \in Q(\rho)/G^0} \mathcal{S}(\rho, \alpha)$$ と分解する。

先のTh.は次のように精密化される：

Th. $\mathcal{S}(p) \underset{\cong}{\xrightarrow{R_j}} \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^j$ $(j=1,2,3)$

$\cup$ $\cup$

$\mathcal{S}(p,a) \underset{\cong}{\longrightarrow}$ ある H^j-orbit （先のTh.の $S^{\text{なる}j}$ は $R_a R_j^{-1}$ で与えられる。）

特に、$Q(p)/G^0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{strictly normal} \\ \text{S-triple の } G^0\text{-共役類} \end{array} \right\} \underset{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^j \text{ 内の} \\ H^j\text{-orbit} \end{array} \right\}$ となる。

証明

R_1 は $\beta(t) = A_2(t) + iA_3(t)/2$ を考えて，標準形に直して $\beta(0)$ を取ることで与えられたが，

今の場合は $X_+ = Y_+ = H_+ = 0$ に注意すると $\beta(0) = \lim_{t \to +\infty} e^{2t}\beta(t)$ であり，

右辺は標準形に直てなくとも，常に等しい。

よって R_1 は $\lim_{t \to \infty} e^{2t}\beta(t)$ で与えられると思ってよい

特に $Q(p)$ を $\mathcal{S}(p)$ の部分集合と思ったときは

$\frac{1}{2}(dp'(e_2) + i\,dp'(e_3)) = R_1(p')$

すると $R_1(\mathcal{S}(p)) \subset \mathfrak{g}_2 \oplus i\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}^1$ は明らかであり，また $\mathcal{S}(p), \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^j$

が共に fixed pt set であることに注意すれば，$\mathcal{S}(p) \underset{R_1}{\cong} \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}^1$ はすぐに従う。

次に　$\mathcal{S}(\rho, a)$ が一つの H^1-orbit になることをいう。

これは　$\mathcal{S}(\rho) = \{ (\alpha(t), \beta(t)) : \mathbb{R} \to \mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{q}^1 \mid \underbrace{\tfrac{d}{dt}\beta + 2\beta + [\alpha, \beta] = 0}_{\text{real equ.}} \} / \mathcal{G}_0$

において　cpx equ.（但し今は値が $\mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{q}^1$ に指定されている）が

大きな gauge 群　$\{ g : \mathbb{R} \to H^1 \}$ による

$$\alpha \mapsto \mathrm{Ad}(g)(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{dg}{dt} g^{-1}$$

$$\beta \mapsto \mathrm{Ad}(g)\beta$$

による作用で不変なことに注意し，

$$\mathcal{S}(\rho) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{l} (\alpha, \beta) : \text{as above} \\ \quad + \text{cpx equ.} \end{array} \right\} \Big/ \{ g : \mathbb{R} \to H^1 \}$$ が誘導され，

あとは Kronheimer の議論において $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ を $\{ g : \mathbb{R} \to H^1 \}$ でおきかえることによって

$\mathcal{S}(\rho, a) \xrightarrow{\cong}$ 一つの H^1-orbit　が分かる。//

そして最後に　$S^{k,j} = R_k \circ R_j^{-1}$ が関口対応を誘導することは

関口の対応が strictly normal S-triple を用いて与えられていたことを思い出し，

$d\rho(e_1), d\rho(e_2), d\rho(e_3)$
$\mapsto \dfrac{d\rho(e_1) + i d\rho(e_2)}{2}$
の $(1,2)$ を入れかえたもの

そして，R_j が $Q(\rho) = \{\text{strict normal S-triple}\}$ の上では explicit に計算できるので分かる。